

Nome e Cognome:

Durata: 2 ore e 30 minuti. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

Esercizio 1 Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq 3\}$ e siano $W = \{p(x) \in V : p(-1) = 0 \text{ e } p(2) = 0\}$ e $Z = \{p(x) \in V : p(1) = p(-1) \text{ e } p(2) = p(-2)\}$

1. Esibire una base di W e la dimensione di Z .
2. È vero che mettendo insieme i vettori di una qualsiasi base di W con quelli di una qualsiasi base di Z si ottiene sempre una base di V ?

Esercizio 2 Sia $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ e, al variare dei parametri λ, a , sia S il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = a \\ \lambda x - y + z + w = 4 \end{cases}$$

1. Per quali valori dei parametri λ, a la retta r è contenuta nell'insieme delle soluzioni?
2. Dati λ, a come sopra, stabilire se la retta r coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema S e, in caso di risposta negativa, aggiungere una o più equazioni al sistema S in modo che r sia l'insieme delle soluzioni del nuovo sistema lineare.

Esercizio 3 Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare equazioni cartesiane per l'immagine di F ed equazioni parametriche per $F^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : F(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$
2. Quanto vale al massimo il rango di un'applicazione lineare $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $G \circ F = 0$?

Esercizio 4 Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $F(x, y, z) = (x + 3y + 2z, 2x - 2z, y + z)$.

1. F è diagonalizzabile? In caso esibire una base diagonalizzante.
2. Calcolare una base dell'intersezione $\text{Im}(F^5) \cap \text{Im}(F^6)$